

УДК 531

Ловейкін В.С.¹, д.т.н, проф.; Човнюк Ю.В.¹, к.т.н., доц.;

Почка К.І.², к.т.н., доц.

¹ Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ)

² Київський національний університет будівництва і архітектури (м. Київ)

АНАЛІЗ УСТАЛЕНИХ КОЛИВАНЬ МЕТАЛОКОНСТРУКЦІЙ СУЧАСНИХ КРАНІВ, ЩО МАЮТЬ ТРІЩИНИ СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ

Постановка проблеми. Робота сучасних конструкцій та споруд, зокрема, металоконструкцій кранів, які мають дефекти типу тріщин, досить часто протікає в умовах багатократного статичного й циклічного навантаження й вібраційного впливу. При розгляді такого роду явищ важливо з'ясувати вплив суто інерційного ефекту на розповсюдження тріщин у металоконструкції (крану). Якщо зовнішнє навантаження прикладене не на березі (берегах) розрізу, тоді його вплив (дія) на тріщину передається неповністю завдяки реакції напружень і здійснюється з деяким запізненням у часі. Тому при розгляді задач про усталені коливання для тіл, що мають тріщини, слід задавати навантаження безпосередньо на берегах розрізу. На думку авторів даної роботи, напружено-деформований стан металоконструкцій кранів вивчений недостатньо, оскільки інерційні ефекти та їх вплив на розповсюдження тріщин у матеріалі конструкції зазвичай не враховується.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Слід зазначити, що найважливішим моментом у теорії тріщин є формулювання умови локального руйнування у розглядуваній точці контуру тріщини. Це також важливо і при вирішенні питання щодо розвитку тріщини, оскільки дозволяє здійснити правильний відбір критерію настання пластичного стану у елементі об'єму.

Найбільш просто формулюється умова локального руйнування у теорії так званих квазі-крихких тріщин, коли найбільший розмір області незворотних деформацій у розглядуваній точці контуру тріщини малий порівняно з довжиною тріщини та відстанню цієї точки до найближчої границі тіла. Найпростіший варіант цієї умови на основі фізичних і математичних ідей А.А. Гріф-фітса [1, 2], Г.Нейбера [3] та Г.М. Вестергарда [4, 5] був запропонований Дж.Р. Ірвіном [6-10]. Він полягає у тому, що коефіцієнт при особливості у виразі для напружень у розглядуваній точці у момент локального руйнування (і просування тріщини у цій точці) вважається рівним деякій постійній матеріалу; при цьому напруження обчислюється у припущенні, що тіло ідеально пружне. Оскільки вказаний коефіцієнт представляє собою деяку

функцію зовнішніх навантажень, довжини тріщини й геометрії тіла, яка знаходиться з розв'язку пружної задачі у цілому, умова локального руйнування на контурі тріщини у принципі дозволяє визначити її розвиток і, зокрема, відшукати ту комбінацію зовнішніх навантажень, котра розділяє області стійкості й нестійкості.

У подальшому були запропоновані різні моделі механізму руйнування у кінці квазікрихкої тріщини. Однак всі відомі моделі, які відрізняються детальною схемою опису локального розриву у кінці крихкої тріщини, еквівалентні у тому сенсі, що завжди призводять до умови Гріффітса-Ірвіна [11, 12]. З'явилися і загальні підходи до опису розвитку тріщин у довільних суцільних середовищах [12-16].

Деякі фундаментальні (концептуальні) ідеї механіки руйнування, котрі були сформульовані на ранніх етапах становлення цієї науки, зібрані у [16].

Для аналізу процесів коливного характеру (усталених коливань) у металокопструкціях сучасних кранів, які мають тріщини, ми у подальшому будемо застосовувати вирази "тіло з розрізом" та "тіло з тріщиною", розуміючи при цьому, що розріз переходить у тріщину тільки тоді, коли застосовується деяка додаткова умова руйнування, яка впливає з фізичних міркувань і не впливає з класичних рівнянь рівноваги й руху теорії пружності.

Механіка розвитку тріщин у металокопструкціях кранів пов'язана з вивченням законів розділення кристалічного чи континуального тіла (матеріалу металокопструкції) на частини під дією механічних зусиль чи інших зовнішніх причин. У подальшому будемо мати на увазі континуальне тіло, яке наділене феноменологічними властивостями, що визначаються експериментально на стандартних зразках.

Мета даної роботи полягає у встановленні основних закономірностей та критеріїв руйнування металокопструкцій сучасних кранів, які мають тріщини скінченної довжини, за умов підтримання вказаними копструкціями усталених коливань.

Виклад основного матеріалу дослідження.

I. Розглянемо усталений хвильовий процес, який відбувається у необмеженій площині металокопструкції крану, котрий має тріщину довжини $2l$, що лежить вповдовж вісі абсцис. Вважаємо, що залежність від часу всіх величин виражається множителем $\exp(-i \cdot \omega \cdot t)$, де ω – частота коливань (кругова), t – час.

Припустимо, що до берегів розрізу прикладене нормальне навантаження $q^{(i)}(\theta) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t}$, де q^i ($i=1,2,3$) – навантаження, що відповідає трьом типам деформацій і напружень біля кінчика тріщини, які можна отримати шляхом взаємного накладання напружень

наступних окремих видів деформацій (1 – відривне переміщення, за якого поверхні тріщини прямо розходяться одна від одної вподовж взаємно протилежних напрямків; 2 – відповідає переміщенням, за яких поверхні тріщини повзають одна по одній – поперечний зсув; 3 – пов'язаний з антиплоскою деформацією (розріз ножицями), за якої одна поверхня ковзає по іншій паралельно направляючому фронту тріщини – поздовжній зсув) [16, 17]. Введемо еліптичну систему координат:

$$x + i \cdot y = l \cdot \operatorname{ch}(\rho + i \cdot \theta), \quad i^2 = -1, \quad (1)$$

де (x, y) – декартові координати; (ρ, θ) – полярні координати (радіус та кут, відповідно), які введені для опису напружено-деформованого стану (НДС) конструкції у околі розрізу. Зокрема, контуру розрізу відповідає значення $\rho = 0$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

Рівняння руху і співвідношення пружності відносно амплітудних значень напружень і переміщень у обраній системі координат мають вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho}(H \cdot \sigma_\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta}(H \cdot \sigma_{\rho\theta}) + \frac{\partial H}{\partial \theta} \cdot \sigma_{\rho\theta} - \frac{\partial H}{\partial \theta} \cdot \sigma_\theta = -H^2 \cdot \rho_0 \cdot \omega^2 \cdot u_\rho; \\ \frac{\partial}{\partial \theta}(H \cdot \sigma_\theta) + \frac{\partial}{\partial \rho}(H \cdot \sigma_{\rho\theta}) + \frac{\partial H}{\partial \rho} \cdot \sigma_{\rho\theta} - \frac{\partial H}{\partial \rho} \cdot \sigma_\rho = -H^2 \cdot \rho_0 \cdot \omega^2 \cdot u_\theta; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sigma_\rho = 2 \cdot \mu \cdot \left(\frac{1}{H} \cdot \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{H^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta} \cdot u_\theta \right) + \frac{\lambda}{H^2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \rho}(H \cdot u_\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta}(H \cdot u_\theta) \right]; \\ \tau_{\rho\theta} = \mu \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{u_\theta}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_\rho}{H} \right) \right]; \\ \sigma_\theta = 2 \cdot \mu \cdot \left(\frac{1}{H} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{H^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial \rho} \cdot u_\rho \right) + \frac{\lambda}{H^2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \rho}(H \cdot u_\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta}(H \cdot u_\theta) \right], \end{cases} \quad (3)$$

де $H^2 = \frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot (\operatorname{ch} 2 \cdot \rho - \cos 2 \cdot \theta)$; ρ_0 – щільність матеріалу конструкції; (λ, μ) – коефіцієнти/константи Ламе.

Виражаємо звичайним чином компоненти переміщень і напружень через дві функції (потенціали) φ та ψ :

$$u_\rho = \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad (4)$$

причому φ та ψ є розв'язками рівнянь:

$$\begin{cases} \nabla^2 \cdot \varphi + 2 \cdot k_1 \cdot (\text{ch} 2 \cdot \rho - \cos 2 \cdot \theta) \cdot \varphi = 0 ; \\ \nabla^2 \cdot \psi + 2 \cdot k_2 \cdot (\text{ch} 2 \cdot \rho - \cos 2 \cdot \theta) \cdot \psi = 0 , \end{cases} \quad (5)$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, $k_1 = \frac{\omega^2 \cdot l^2}{4 \cdot C_1^2}$, $k_2 = \frac{\omega^2 \cdot l^2}{4 \cdot C_2^2}$ – безрозмірні

величини; $C_1 = \left(\frac{\lambda + 2 \cdot \mu}{\rho_0} \right)^{1/2}$ – швидкість хвиль розширення

(поздовжніх); $C_2 = \left(\frac{\mu}{\rho_0} \right)^{1/2}$ – швидкість хвиль зсуву (поперечних).

За такого представлення напруження (3) приймають вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \sigma_\rho = -\frac{1}{H} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{1}{H} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{H^3} \cdot \frac{\partial H}{\partial \rho} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\omega^2}{2 \cdot C_2^2} \cdot \varphi ; \\ \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \tau_{\rho\theta} = \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{1}{H} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{H^3} \cdot \frac{\partial H}{\partial \rho} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{\omega^2}{2 \cdot C_2^2} \cdot \psi ; \\ \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \sigma_\theta = \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{1}{H} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{H^3} \cdot \frac{\partial H}{\partial \rho} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\lambda}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\omega^2}{C_1^2} \cdot \varphi . \end{cases} \quad (6)$$

Розділяючи змінні у рівняннях (5), отримаємо звичайні диференціальні рівняння, розв'язками котрих є функції Мат'є [18].

Нехай на контурі щілини $\rho = 0$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) задані напруження

$\sigma_\rho^{(0)} = 0$, $\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0$; тоді з перших двох рівностей (6) із врахуванням

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0, \quad H|_{\rho=0} = l \cdot \sin \theta$$

матимемо:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)_{\rho=0} = -2 \cdot k_2 \cdot \sin \theta \cdot \int_{\pi/2}^{\theta} \sin \theta \cdot \varphi \cdot d\theta - \frac{l^2}{2 \cdot \mu} \cdot \sin \theta \cdot \int_{\pi/2}^{\theta} \sin \theta \cdot \sigma_\rho^{(0)} \cdot d\theta ; \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{\rho=0} = -2 \cdot k_2 \cdot \sin \theta \cdot \int_0^{\theta} \sin \theta \cdot \psi \cdot d\theta . \end{cases} \quad (7)$$

Співвідношення (7) отримані із врахуванням граничних умов:

$$u_\rho|_{\rho=0, \theta=0} = 0 ; \quad u_\theta|_{\rho=0, \theta=\pi/2} = 0 \quad (8)$$

Використовуючи симетрію НДС та умови на нескінченності, подамо розв'язки (5) у вигляді:

$$\begin{cases} \varphi(\rho, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cdot \text{Fek}_{2m}(\rho, k_1) \cdot ce_{2m}(\theta, k_1); \\ \psi(\rho, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m \cdot \text{Gek}_{2m}(\rho, k_2) \cdot se_{2m+2}(\theta, k_2). \end{cases} \quad (9)$$

Тут C_m, D_m – постійні; $ce_{2m}(\theta, k_1), se_{2m+2}(\theta, k_2)$ – періодичні розв'язки (рішення) Мат'є; $\text{Fek}_{2m}(\rho, k_1), \text{Gek}_{2m}(\rho, k_2)$ – інші (другі) розв'язки (рішення) рівняння Мат'є.

Періодичні функції Мат'є можуть бути подані у вигляді ряду [18]:

$$\begin{cases} ce_{2m}(\theta, k_1) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2m)} \cdot \cos(2 \cdot r \cdot \theta); \\ se_{2m}(\theta, k_2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2m+2)} \cdot \sin[(2 \cdot r + 2) \cdot \theta]. \end{cases} \quad (10)$$

У цих рядах $A_{2r}^{(2m)}, B_{2r+2}^{(2m+2)}$ – функції від k_1 та k_2 , відповідно; спосіб їх обчислення вказаний у [18].

Зазначимо, що поведінка функцій $\text{Fek}_{2m}(\rho, k_1)$ та $\text{Gek}_{2m}(\rho, k_2)$ при великих значеннях ρ зводиться до наступного. Маємо при $\rho \rightarrow \infty$ ($H_{2m}^{(1)}(x)$ – функція Ханкеля):

$$\begin{cases} \text{Fek}_{2m}(\rho, k_1) \rightarrow \frac{i}{2} \cdot (-1)^m \cdot p_{2m} \cdot H_{2m}^{(1)}\left(\frac{2}{l} \cdot \sqrt{k_1} \cdot r\right); & \frac{1}{2} \cdot l \cdot e^{\rho} \rightarrow r; \\ \text{Gek}_{2m+2}(\rho, k_2) \rightarrow \frac{i}{2} \cdot (-1)^{m+1} \cdot s_{2m+2} \cdot H_{2m+2}^{(1)}\left(\frac{2}{l} \cdot \sqrt{k_2} \cdot r\right); \\ p_{2m} = \frac{ce_{2m}(0, k_1) \cdot ce_{2m}(\pi/2, k_1)}{A_0^{(2m)}}; & s_{2m+2} = \frac{se'_{2m}(0, k_2) \cdot se'_{2m}(\pi/2, k_2)}{k_2 \cdot B_2^{(2m+2)}}, \end{cases} \quad (11)$$

де штрих означає диференціювання по θ .

Із врахуванням (11) потенціали φ та ψ , які визначаються співвідношеннями (9), задовольняють відомим умовам випромінювання:

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{r} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} - i \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{k_1}}{l} \cdot \varphi \right) \right\} = 0, & \varphi = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right); \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{r} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - i \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{k_2}}{l} \cdot \psi \right) \right\} = 0, & \psi = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right). \end{cases} \quad (12)$$

У загальному випадку функції $Fek_{2m}(\rho, k_1)$ та $Gek_{2m}(\rho, k_2)$ – комплексні функції і можуть бути представлені у виді:

$$\begin{cases} Fek_{2m}(\rho, k_1) = -\frac{1}{2} \cdot Fey_{2m}(\rho, k_1) + \frac{i}{2} \cdot Ce_{2m}(\rho, k_1); \\ Gek_{2m}(\rho, k_2) = -\frac{1}{2} \cdot GeY_{2m+2}(\rho, k_2) + \frac{i}{2} \cdot Se_{2m+2}(\rho, k_2); \\ Ce_{2m}(\rho, k_1) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2m)} \cdot \text{ch}(2 \cdot r \cdot \rho); & Se_{2m+2}(\rho, k_2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2m+2)} \cdot \text{sh}[(2 \cdot r + 2) \cdot \rho]; \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} Fey_{2m}(\rho, k_1) = \frac{ce_{2m}(\frac{\pi}{2}, k_1)}{A_0^{(2m)}} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \cdot A_{2r}^{(2m)} \cdot Y_{2r}(2 \cdot k_1 \cdot \text{ch} \rho); \\ GeY_{2m+2}(\rho, k_2) = -\frac{S_{2m+2}}{B_2^{(2m+2)}} \times \\ \times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \cdot B_{2r+2}^{(2m+2)} \left[J_r(e^{-\rho} \cdot \sqrt{k_2}) \cdot Y_{r+2}(e^{\rho} \cdot \sqrt{k_2}) - J_{r+2}(e^{-\rho} \cdot \sqrt{k_2}) \cdot Y_r(e^{\rho} \cdot \sqrt{k_2}) \right]. \end{cases} \quad (14)$$

Тут $Ce_{2m}(\rho, k_1)$, $Se_{2m+2}(\rho, k_2)$ – модифіковані функції Матьє першого роду; J_{2r} , Y_{2r} – функції Бесселя першого і другого роду.

Підставляючи (9) у граничні умови (7), матимемо:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cdot Fek_{2m}(0, k_1) \cdot ce'_{2m}(\theta, k_1) - \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cdot Gek'_{2n+2}(0, k_2) \cdot se_{2n+2}(\theta, k_2) = \\ & = -2 \cdot k_2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cdot Fek_{2m}(0, k_1) \cdot \left[\sin \theta \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \sin \theta \cdot ce_{2m}(\theta, k_1) \cdot d\theta \right] - \frac{l^2}{2 \cdot \mu} \cdot \sin \theta \cdot \left. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \sin \theta \cdot \sigma_{\rho} \right|_{\rho=0} \cdot d\theta; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot Fek'_{2n}(0, k_1) \cdot ce_{2n}(\theta, k_1) + \sum_{m=0}^{\infty} D_m \cdot Gek_{2m+2}(0, k_2) \cdot se'_{2m+2}(\theta, k_2) = \\ & = -2 \cdot k_2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} D_m \cdot Gek_{2m+2}(0, k_2) \cdot \left[\sin \theta \cdot \int_0^{\theta} \sin \theta \cdot se_{2m+2}(\theta, k_2) \cdot d\theta \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Помножимо рівність (15) на $se_{2n+2}(\theta, k_2)$, а рівність (16) – на $ce_{2n}(\theta, k_1)$ і про інтегруємо по θ у межах від 0 до 2π ; матимемо, із врахуванням ортогональності періодичних розв'язків Матьє, дві нескінченні системи рівнянь для визначення C_m та D_m :

$$\left\{ \begin{aligned} C_n \cdot \text{Fek}'_{2n}(0, k_1) + \sum_{m=0}^{\infty} D_m \cdot \text{Gek}_{2m+2}(0, k_2) \cdot \alpha_{nm} &= 0 ; \\ \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cdot \text{Fek}_{2m}(0, k_1) \cdot \beta_{nm} - D_n \cdot \text{Gek}'_{2n+2}(0, k_2) &= -\frac{l^2}{2 \cdot \mu} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} f_{nm} \cdot \tilde{q}_m^{(1)} . \end{aligned} \right. \quad (17)$$

Тут $\tilde{q}_m^{(1)}$ – коефіцієнти розкладу нормальних напружень на контурі у ряд за парними функціями Матґе:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_m^{(1)} &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sigma_\rho \Big|_{\rho=0} \cdot ce_{2m}(\theta, k_1) \cdot d\theta ; \\ \sigma_\rho \Big|_{\rho=0} &= \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{q}_m^{(1)} \cdot ce_{2m}(\theta, k_1) ; \\ \alpha_{nm} &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} se'_{2m+2}(\theta, k_2) \cdot ce_{2n}(\theta, k_1) \cdot d\theta + \\ &+ \frac{2 \cdot k_2}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left[\sin \theta \cdot ce_{2n}(\theta, k_1) \cdot \int_0^\theta \sin \theta_1 \cdot se_{2m+2}(\theta_1, k_2) \cdot d\theta_1 \right] \cdot d\theta ; \\ f_{nm} &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left[\sin \theta \cdot se_{2n+2}(\theta, k_2) \cdot \int_{\pi/2}^\theta \sin \theta_1 \cdot ce_{2m}(\theta_1, k_1) \cdot d\theta_1 \right] \cdot d\theta ; \\ \beta_{nm} &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} ce'_{2m}(\theta, k_1) \cdot se_{2n+2}(\theta, k_2) \cdot d\theta + \\ &+ \frac{2 \cdot k_2}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left[\sin \theta \cdot se_{2n+2}(\theta, k_2) \cdot \int_{\pi/2}^\theta \sin \theta_1 \cdot ce_{2m}(\theta_1, k_1) \cdot d\theta_1 \right] \cdot d\theta . \end{aligned} \quad (19)$$

Таким чином, α_{nm} , β_{nm} , f_{nm} є коефіцієнтами наступних розкладів:

$$\begin{aligned} ce'_{2m}(\theta, k_1) + 2 \cdot k_2 \cdot \sin \theta \cdot \int_{\pi/2}^\theta \sin \theta_1 \cdot ce_{2m}(\theta_1, k_1) \cdot d\theta_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{nm} \cdot se_{2n+2}(\theta, k_2) ; \\ se'_{2m+2}(\theta, k_2) + 2 \cdot k_2 \cdot \sin \theta \cdot \int_0^\theta \sin \theta_1 \cdot se_{2m+2}(\theta_1, k_2) \cdot d\theta_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{nm} \cdot ce_{2n}(\theta, k_1) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\sin \theta \cdot \int_{\pi/2}^{\theta} \sin \theta_1 \cdot ce_{2m}(\theta_1, k_1) \cdot d\theta_1 = \sum_{n=0}^{\infty} f_{nm} \cdot se_{2n+2}(\theta, k_2)$$

Використовуючи розклад у ряди Фур'є для функцій $ce_{2n}(\theta, k_1)$ та $se_{2n+2}(\theta, k_2)$, можна показати, що:

$$\alpha_{nm} = \sum_{r=0}^{\infty} 2r \cdot A_{2r}^{(2n)} \cdot B_{2r}^{(2m+2)} + \frac{k_2}{2} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_{2r+2}^{(2m+2)}}{(2r+1) \cdot (2r+3)} \times$$

$$\times \left[(2r+3) \cdot A_{2r}^{(2n)} + (2r+1) \cdot A_{2r+3}^{(2n)} - 4 \cdot (r+1) \cdot A_{2r+2}^{(2n)} \right];$$

$$\beta_{nm} = -\alpha_{nm}; \quad (21)$$

$$f_{nm} = -\frac{1}{2} \cdot A_0^{(2m)} \cdot B_2^{(2n+2)} + \frac{1}{4} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \frac{A_{2r}^{(2m)}}{(4r^2-1)} \cdot \left[4r \cdot B_{2r}^{(2n+2)} - (2r-1) \cdot B_{2r+2}^{(2n+2)} - (2r+1) \cdot B_{2r-2}^{(2n+2)} \right]$$

Таким чином, при заданій на контурі розрізу величині нормального напруження задача зводиться до визначення постійних C_n та D_n ($n=0,1,2,\dots$) з двох нескінченних систем (17) та (18).

Визначимо нормальні напруження у точках дійсної вісі на продовженні розрізу:

$$\sigma_{\theta}|_{\theta=0} = \frac{2 \cdot \mu}{l^2 \cdot \text{sh}^3 \rho} \cdot \left[\text{sh} \rho \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \cdot \partial \theta} \right)_{\theta=0} + \text{ch} \rho \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} \right] - \frac{\lambda \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \varphi}{(\lambda + 2 \cdot \mu)} \Big|_{\theta=0}. \quad (22)$$

Тоді із врахуванням (22) коефіцієнт інтенсивності напружень K

дорівнює ($\sqrt{s} = \sqrt{2l} = \text{sh}(\rho/2)$):

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\sqrt{2 \cdot \pi \cdot s} \cdot \sigma_{\theta}|_{\theta=0} \right] = \frac{\mu \cdot \sqrt{\pi \cdot l}}{l^2} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \rho \cdot \partial \theta^2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial \rho^2 \cdot \partial \theta} \right)_{\theta=0}. \quad (23)$$

Підставляючи вирази для φ та ψ і переходячи до границі, отримаємо:

$$K = \frac{\mu \cdot \sqrt{\pi \cdot l}}{l^2} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} [C_m \cdot \text{Fek}'_{2m}(0, k_1) \cdot ce_{2m}''(0, k_1) - D_m \cdot \text{Gek}''_{2m+2}(0, k_2) \cdot se'_{2m+2}(0, k_2)] \quad (24)$$

Приймаючи до уваги співвідношення [18]:

$$\begin{cases} ce_{2m}''(0, k_1) = (2 \cdot k_1 - a_{2m}) \cdot ce_{2m}(0, k_1); \\ \text{Gek}''_{2m+2}(0, k_2) = (b_{2m+2} - 2 \cdot k_2) \cdot \text{Gek}_{2m+2}(0, k_2), \end{cases} \quad (25)$$

можна записати вираз (24) у виді:

$$K = \frac{\mu \cdot \sqrt{\pi \cdot l}}{l^2} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left[C_m \cdot \text{Fek}'_{2m}(0, k_1) \cdot (2 \cdot k_1 - a_{2m}) \cdot ce_{2m}(0, k_1) - \right. \\ \left. - D_m \cdot \text{Gek}_{2m+2}(0, k_2) \cdot (b_{2m+2} - 2 \cdot k_2) \cdot se'_{2m+2}(0, k_2) \right]. \quad (26)$$

Тут a_{2m} та b_{2m+2} – власні значення функцій Матьє $ce_{2m}(0, k_1)$ та $se_{2m+2}(0, k_2)$ відповідно.

При обчисленні, наприклад, коефіцієнту інтенсивності напружень у відповідності з (24) основні труднощі полягають у розв'язуванні систем (17) та (18). Однак для малих значень k_1 та k_2 розв'язок спрощується [17].

Для реальних матеріалів металоконструкцій кранів значення аргументів k_1 та k_2 функцій Матьє, через які представляється розв'язок, наступні:

$$k_1 = \frac{\omega^2 \cdot l^2 \cdot \rho_0}{4 \cdot (\lambda + 2 \cdot \mu)} \approx \frac{\omega^2 \cdot l^2 \cdot 7,8 \cdot 10^3}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^{11}} \approx 0,93 \cdot 10^{-8} \cdot (\omega \cdot l)^2 ;$$

$$k_2 = \frac{\omega^2 \cdot l^2 \cdot \rho_0}{4 \cdot \mu} \approx 3 \cdot 10^{-8} \cdot (\omega \cdot l)^2 \quad (27)$$

Таким чином, вимоги малості k_1 та k_2 все одно дають можливість досліджувати достатньо великий і найбільш важливий (на відміну від задач дифракції) діапазон розглядуваних тут частот (принаймні до $\omega \cdot l \sim 10^3$, при цьому $[\omega] = \text{рад}/\text{с}$, $[l] = \text{м}$).

Для малих значень k_1 та k_2 можна скористатись асимптотичними формулами для обчислення функцій Матьє, а також відомими співвідношеннями:

$$Fek'_{2m}(0, k_1) = -\frac{1}{2} \cdot Fey'_{2m}(0, k_1) = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{p_{2m}}{A_0^{(2m)}} \cdot ce_{2m}\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right) ;$$

$$Fek_0(0, k_1) \approx -\frac{\sqrt{2}}{4 \cdot \pi} \cdot \ln k_1 ;$$

$$Gek_{2m+2}(0, k_2) = -\frac{1}{2} \cdot GeY_{2m+2}(0, k_2) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{s_{2m+2} \cdot se'_{2m+2}\left(\frac{\pi}{2}, k_2\right)}{k_2 \cdot B_2^{(2m+2)}} ; \quad (28)$$

$$Fek_{2m}(0, k_1) = -\frac{1}{2} \cdot Fey_{2m}(0, k_1) + \frac{i}{2} \cdot ce_{2m}(0, k_1) \approx -\frac{1}{2\pi} \cdot 2^{4m-1} \cdot (2m-1)! \cdot (2m)! \cdot \frac{1}{k_1^{2m}} + \frac{i}{2} \cdot ce_{2m}(0, k_1)$$

;

$$Gek'_{2m+2}(0, k_2) = -\frac{1}{2} \cdot GeY'_{2m+2}(0, k_2) + \frac{i}{2} \cdot se'_{2m+2}(0, k_2) \approx$$

$$\approx -\frac{1}{2\pi} \cdot 2^{4m+3} \cdot [(2m+2)!]^2 \cdot \frac{1}{k_2^{2m}} + \frac{i}{2} \cdot se'_{2m+2}(0, k_2) .$$

Результати чисельного розрахунку безрозмірної величини $\frac{K}{(q^{(1)} \cdot \sqrt{\pi \cdot l})}$ у залежності від $\frac{\omega \cdot l}{C_1}$ подані на рис. 1 для $q^{(1)}(\theta) = q^{(1)} = const$. Отриманий результат підтверджується у роботі [20], зокрема, для моментів часу, які відповідають відбитій від тріщини гармонічної хвилі (розглядалась задача про падіння з нескінченності на тріщину гармонічної хвилі).

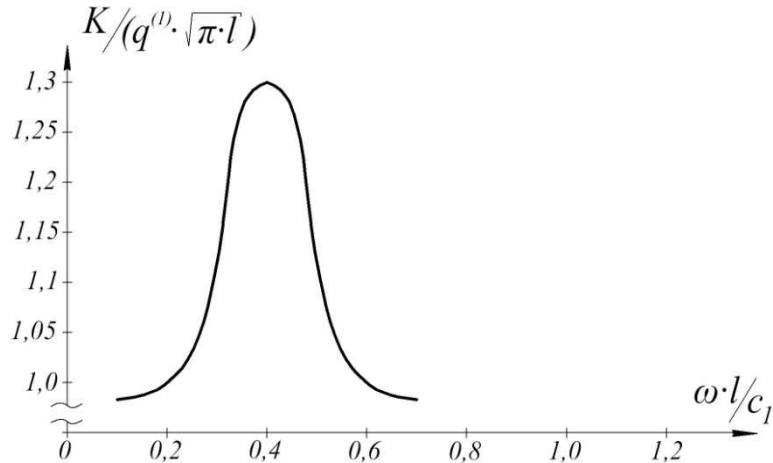


Рис. 1. Залежність коефіцієнту інтенсивності напружень від хвильового

числа $\frac{\omega \cdot l}{C_1}$ при $\nu = 0,3$ (де ν – коефіцієнт Пуассона)

У табл. 1 подані значення $\omega, рад/с$ та $f, Гц$ для різних значень $l, м$, за яких $\frac{K}{(q^{(1)} \cdot \sqrt{\pi \cdot l})} \rightarrow \max(\approx 1,3)$.

Таблиця 1

Значення $\omega, рад/с$ та $f, Гц$ для різних значень $l, м$ при $\frac{K}{(q^{(1)} \cdot \sqrt{\pi \cdot l})} \rightarrow \max$ (матеріал - сталь)

$l, м$	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
$\omega, рад/с$	$2 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^4$
$f, Гц$	$3,2 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^5$	$3,2 \cdot 10^4$	$3,2 \cdot 10^3$

2

Розглянемо тепер пружне ізотропне нескінчене тіло (модель металокопункції крана) з тонкою внутрішньою "тунельною" тріщиною (рис. 2), на яке діє динамічне

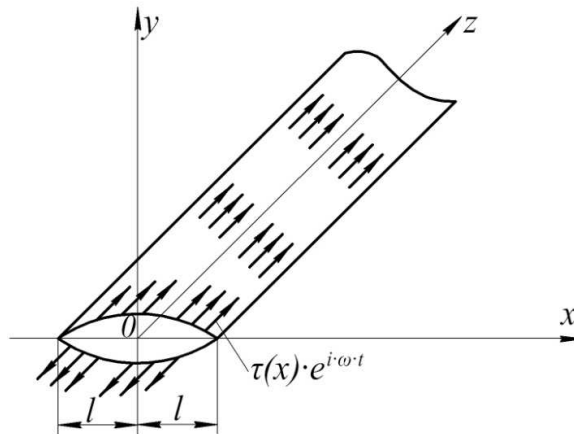


Рис. 2. Схема навантаження металокопункції крана як тіла з тріщиною

зсувне зусилля $\tau(x) \cdot e^{i \cdot \omega t}$. У даному випадку зсув відбувається у напрямку, перпендикулярному до можливого розповсюдження тріщини (чистий зсув або антиплоска деформація). Зрозумілою є доцільність аналітичного вивчення поведінки металокопункції крана як тіла з тріщиною при такому виді деформації.

Приведемо розв'язок цієї задачі у еліптичних координатах (як і у попередньому пункті) у рядах по функціям Матьє [20]; слід зазначити, що розв'язок аналогічної статичної задачі відомий [21].

Отже, припустимо, що до берегів тріщини $|x| \leq l, y = 0$ прикладене зсувне зусилля $\tau(x) \cdot e^{i \cdot \omega t}$ (для спрощення задачі приймаємо, що $\tau(x)$ – парна функція x).

У випадку чистого зсуву:

$$u_x = u_y = 0; \quad u_z = w = w(x, y, t), \quad (29)$$

де $u_{x,y,z}$ – переміщення вздовж відповідних осей (Ox, Oy, Oz), й при відсутності об'ємних сил переміщення w задовольняє рівнянню:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{c_2^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (30)$$

Компоненти тензору напружень, які не дорівнюють нулю, визначаються співвідношеннями:

$$\tau_{xz} = \mu \cdot \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \tau_{yz} = \mu \cdot \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (31)$$

Розглядаючи усталені періодичні коливання з круговою частотою ω , вважаємо:

$$w(x, y, t) = w^*(x, y) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad (32)$$

Тоді рівняння (30) прийме вид:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \lambda^2 \cdot w^* = 0 \quad \left(\lambda^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} \right). \quad (33)$$

Граничні умови при $y = 0$ будуть наступними:

$$\begin{cases} \tau_{xy}^*(x, 0) = -\tau(x), \quad |x| < l; & w^*(x, 0) = 0, \quad |x| > l; \\ \tau_{zy}^*(x, y, t) = \tau_{zy}^*(x, y) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}. \end{cases} \quad (34)$$

Крім умов (34) повинні бути виконані також умови випромінювання (умови на нескінченості) (12), котрі, як відомо, полягають у тому, що поле (переміщень, напружень) на нескінченості представляє собою розбіжну у просторі хвилю. Таким чином, розглядувана задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння (33), який задовольняє граничним умовам (34) і умовам випромінювання (12).

Введемо, як і пункті 1, еліптичні координати, що визначаються співвідношенням: $x + i \cdot y = l \cdot \text{ch}(\rho + i \cdot \theta)$, де тріщина $|x| < l, y = 0$ у еліптичних координатах характеризується тим, що для неї $\rho = 0$. Рівняння (33) у цих координатах буде мати вид (5) ($2 \cdot k = \lambda \cdot l$):

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial \theta^2} + 2 \cdot k^2 \cdot (\text{ch} 2\rho - \cos 2\theta) \cdot w^* = 0 \quad (35)$$

Розв'язок цього рівняння представляємо у вигляді:

$$w^*(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot Ne_{2n+1}^{(2)}(\rho, q) \cdot se_{2n+1}(\theta, q) \quad (36)$$

Тут $q = k^2$, $se_{2n+1}(\theta, q)$ – періодичні функції Мат'є цілого порядку; $Ne_{2n+1}^{(2)}(\rho, q)$ – модифіковані функції Мат'є [18]; C_n – постійні.

У вершині тріщини ($\rho = 0$) виникають параметричні коливання, найнижчий поріг збудження котрих мають ті, що задовольняють умові [22]:

$$k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda \cdot l = 1 \Rightarrow \frac{\omega}{c_2} \cdot l = 1 \quad (37)$$

У табл. 2 подані значення $\omega, \text{рад/с}$ та $f, \text{Гц}$ для металокопункцій кранів для різних значень $l, \text{м}$, котрі призводять до виникнення головного параметричного резонансу у матеріалі

конструкції у околі кінчика тріщини. Зрозуміло, що наведені результати розрахунків можуть бути використані для ранньої (акустодіагностики) металокопструкцій кранів на предмет розвитку у останніх тріщин, які зростають у своїх розмірах і можуть призвести з плином часу до аварійних наслідків.

Таблиця 2

Значення $\omega, \text{рад/с}$ та $f, \text{Гц}$ для металокопструкцій кранів при різних значень $l, \text{м}$ тріщини, за яких у околі кінчика тріщини виникають параметричні коливання

(головний параметричний резонанс), $c_2 = 4 \cdot 10^3 \text{ м/с}$

$l, \text{м}$	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
$\omega, \text{рад/с}$	$4 \cdot 10^{11}$	$4 \cdot 10^{10}$	$4 \cdot 10^9$	$4 \cdot 10^8$	$4 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^5$
$f, \text{Гц}$	$6,4 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^9$	$6,4 \cdot 10^8$	$6,4 \cdot 10^7$	$6,4 \cdot 10^6$	$6,4 \cdot 10^5$	$6,4 \cdot 10^4$

Використовуючи властивості функції Матьє, можемо впевнитись у тому, що розв'язок (36) задовольняє рівнянню (35), умовам випромінювання (12), а також другому граничному співвідношенню (умові) (34). Крім того, він задовольняє умовам симетрії й періодичності. Перша умова (34) у еліптичних координатах приймає вид:

$$\tau_{zy}^* = -\tau(l \cdot \cos \theta) \quad \text{при} \quad \rho = 0. \quad (38)$$

Із врахуванням формули (36) можна обчислити напруження τ_{zy} у будь-якій точці тіла (металокопструкції). Зокрема, при $\rho = 0$ маємо:

$$\tau_{zy}^*(0, \theta) = \frac{\mu}{l \cdot \sin \theta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot Ne_{2n+1}^{(2)'}(0, q) \cdot se_{2n+1}(\theta, q) \quad (39)$$

Тепер можна задовольнити граничній умові (38). Оскільки функція $\tau_{zy}^*(0, \theta)$ відома, запишемо наступний розклад у ряд:

$$\tau_{zy}^*(0, \theta) \cdot \sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n \cdot se_{2n+1}(\theta, q) \quad (40)$$

Тут

$$\tau_n = \frac{1}{n} \cdot \int_0^{2\pi} \tau_{zy}^*(0, \theta) \cdot \sin \theta \cdot se_{2n+1}(\theta, q) \cdot d\theta \quad (41)$$

Порівнюючи (39) та (40), знаходимо:

$$C_n = \frac{\tau_n \cdot l}{\mu \cdot Ne_{2n+1}^{(2)'}(0, q)} \quad (42)$$

Із врахуванням цього співвідношення розв'язок (36) приймає вид:

$$w^*(\rho, \theta) = \frac{l}{\mu} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau_n}{Ne_{2n+1}^{(2)}(0, q)} \cdot Ne_{2n+1}^{(2)}(\rho, q) \cdot se_{2n+1}(\theta, q) \quad (43)$$

Далі знадобиться вираз τ_{zy}^* при $\theta=0$. Використовуючи (43), отримаємо:

$$\tau_{zy}^*(\rho, 0) = \frac{1}{\text{sh}\rho} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n \cdot \frac{se'_{2n+1}(0, q)}{Ne_{2n+1}^{(2)}(0, q)} \cdot Ne_{2n+1}^{(2)}(\rho, q) \quad (44)$$

Коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) у випадку поздовжнього зсуву дорівнює:

$$K_{III}(t) = \lim_{x \rightarrow l+0} \left(\sqrt{2\pi \cdot (x-l)} \right) \cdot \tau_{zy}(x, 0, t) \quad (45)$$

причому для усталених періодичних коливань:

$$K_{III}(t) = K_{III}^* \cdot e^{i\omega t} \quad (46)$$

де K_{III}^* – комплексна амплітуда КІН.

Оскільки відстань від кінця тріщини (вподовж осі x) дорівнює:

$$x|_{\theta=0} - l = l \cdot \text{ch}\rho - l = 2 \cdot l \cdot \text{sh}^2\left(\frac{\rho}{2}\right) \quad (47)$$

тоді

$$K_{III}^* = 2 \cdot \sqrt{\pi \cdot l} \cdot \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\text{sh}\left(\frac{\rho}{2}\right) \cdot \tau_{zy}^*(\rho, 0) \right] \quad (48)$$

Підставляючи у (48) вираз $\tau_{zy}^*(\rho, 0)$ з (44) й розкриваючи невизначеність, отримаємо:

$$K_{III}^* = 2 \cdot i \cdot \pi^{-1/2} \cdot l^{1/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n \cdot \frac{s_{2n+1}^2}{Ne_{2n+1}^{(2)}(0, q)} \quad (49)$$

Тут

$$s_{2n+1} = \frac{se'_{2n+1}(0, q) \cdot se_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{q^{1/2} \cdot B_1^{(2n+1)}} \quad (50)$$

де $B_1^{(2n+1)}$ – коефіцієнт при першому члені розкладу у ряд функції $se_{2n+1}(\theta, q)$ за синусами.

Оскільки K^* – комплексна величина, покладемо:

$$K_{III}^* = K_{III}^{(1)} + i \cdot K_{III}^{(2)} = K_0 \cdot e^{-i \cdot \delta} \quad (51)$$

де

$$K_0 = \sqrt{(K_{III}^{(1)})^2 + (K_{III}^{(2)})^2} \quad \delta = -\arctg\left\{\frac{K_{III}^{(2)}}{K_{III}^{(1)}}\right\}. \quad (52)$$

Таким чином,

$$K_{III}(t) = K_0 \cdot \exp\{i \cdot (\omega \cdot t - \delta)\} \quad (53)$$

За допомогою останньої формули можна визначити КІН для пружного нескінченного тіла (металоконструкції крана) з тріщиною розглядуваного виду при усталених коливаннях. Якщо до берегів тріщини прикладені зсувні зусилля $\tau(x) \cdot \cos \omega \cdot t$, тоді КІН буде $K_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \delta)$.

Враховуючи те, що:

$$Ne_{2n+1}^{(2)}(\rho, q) = Se_{2n+1}(\rho, q) - i \cdot Ge_{2n+1}(\rho, q), \quad (54)$$

і використовуючи (49) та (51), знаходимо:

$$\begin{cases} K_{III}^{(1)} = -2 \cdot \left(\frac{l}{\pi}\right)^{1/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau_n \cdot s_{2n+1}^2 \cdot Ge_{2n+1}'(0, q)}{\Omega_{2n+1}(q)} ; \\ K_{III}^{(2)} = 2 \cdot \left(\frac{l}{\pi}\right)^{1/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau_n \cdot s_{2n+1}^2 \cdot Se_{2n+1}'(0, q)}{\Omega_{2n+1}(q)}. \end{cases} \quad (55)$$

$$\text{Тут } \Omega_{2n+1}(q) = [Se_{2n+1}'(0, q)]^2 + [Ge_{2n+1}'(0, q)]^2.$$

При виконанні розрахунків за цими формулами необхідно користуватись таблицями для обчислення функцій Матьє [23].

Розглянемо чисельний приклад, який ілюструє отримані результати. Нехай

$$\tau(x) = \tau = \text{const} \quad \text{при } 0 < \theta < 2\pi \quad (56)$$

й на основі (41):

$$\tau_n = -\frac{\tau}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot se_{2n+1}(\theta, q) \cdot d\theta \quad (57)$$

Обчислюючи цей інтеграл, знаходимо:

$$\tau_n = -\tau \cdot B_1^{(2n+1)} \quad (58)$$

Формули (55) у даному випадку приймають вид:

$$K_{III}^{(1)} = 2 \cdot \tau \cdot \left(\frac{l}{\pi}\right)^{1/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_1^{(2n+1)} \cdot s_{2n+1}^2 \cdot Ge_{2n+1}'(0, q)}{\Omega_{2n+1}(q)} ; \quad (59)$$

$$K_{III}^{(2)} = -2 \cdot \tau \cdot \left(\frac{l}{\pi}\right)^{1/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_1^{(2n+1)} \cdot s_{2n+1}^2 \cdot Se'_{2n+1}(0, q)}{\Omega_{2n+1}(q)}$$

За цими формулами були розраховані на ПЕОМ величини $K_{III}^{(1)}$ та $K_{III}^{(2)}$ для низки значень безрозмірного параметру $q = \frac{\omega^2 \cdot l^2}{4 \cdot C_2^2}$ (як свідчить практика, зазвичай $0 \leq q \leq 2$).

Потім у відповідності до (52) були знайдені значення K_0 та δ . Формулу для K_0 у даному випадку доцільно подати так:

$$K_0 = \alpha \cdot \tau \cdot \sqrt{\pi \cdot l} \quad (60)$$

На рис. 3 наведені залежності $\alpha - q$ та $\delta - q$ (значення δ зазначені у радіанах). При $\omega \rightarrow 0$ і, відповідно, $q \rightarrow 0$ отримуємо результати, які відносяться до статичної задачі. Видно, що зміна амплітуди КІН третього роду від частоти має такий самий характер, як і у випадку КІН першого роду (див. рис. 1).

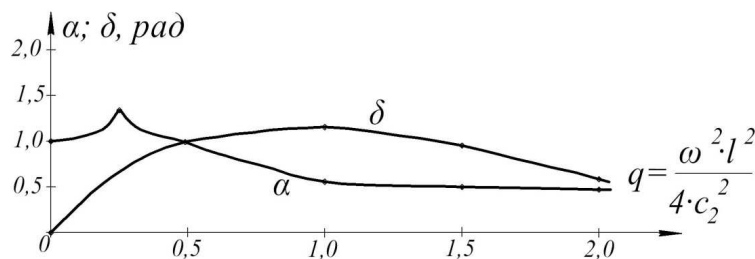


Рис. 3. Зміна параметрів α та δ , які характеризують КІН, у залежності від квадрату хвильового числа $q = k^2$ (q – безрозмірне)

Висновки

1. У межах моделі усталених коливань металоконструкцій кранів як тіл з тріщинами встановлені основні параметри та характеристики НДС і КІН.
2. Виявлені умови, за яких у вершині тріщини виникають явища (головного) параметричного резонансу ($\omega_{рез.} = \frac{\omega}{2}$, де ω – частота (кругова) вимушених коливань металоконструкції). При цьому КІН зростає у 1,3...1,5 разів.
3. Отримані у роботі результати можуть у подальшому слугувати для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних методів

розрахунку НДС металоконструкцій сучасних кранів, які мають тріщини, з метою більш вдалого прогнозування довговічності й надійності функціонування вказаних конструкцій як на стадіях їх проектування/конструювання, так і в режимах реальної експлуатації.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Griffith A.A.* The phenomenon of rupture and flow in solids. / A.A. Griffith // *Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A.* – 1920. – V. 221. – P. 163-198.
2. *Griffith A.A.* The theory of rupture. / A.A. Griffith – In: *Proc. 1st Int. Congr. Appl. Mech.* – Delft. – 1924. – P. 55-63.
3. *Нейбер Г.* Концентрация напряжений. / Г. Нейбер. – М.: Гостехиздат, 1947. – 204 с.
4. *Westergaard H.M.* Stresses at a crack size of the crack and the bending of reinforced concrete. / H.M. Westergaard // *J. Amer. Concr. Inst.* – 1933. – V. 5. – No. 2. – P. 93-103.
5. *Westergaard H.M.* Bearing pressures and cracks. / H.M. Westergaard // *J. Appl. Mech.* – 1939. – V. 6. – No. 2. – P. A49-A53.
6. *Jrwin G.R.* Fracture dynamics. Fracturing of metals. / G.R. Jrwin // ASM. – Cleveland, 1948. – P. 147-166.
7. *Jrwin G.R.* Relation of stresses near a crack to the crack extension force. / G.R. Jrwin. – In: *Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech.* – Brussels, 1957. – V. 8. – P. 245-251.
8. *Jrwin G.R.* Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a plate. / G.R. Jrwin. // *J. Appl. Mech.* – 1957. – V. 24. – No. 3. – P. 361-364. (Discussion. – *J. Appl. Mech.* – 1958. – V. 25. – No. 2. – P. 299-303).
9. *Jrwin G.R.* Fracture. – *Handbuch der Physik.* – Berlin: Springer-Verlag, 1958. – Bd. 6. – P. 551-590.
10. *Jrwin G.R.* Plastic zone near a crack and fracture toughness. // G.R. Jrwin. – 7th Sagamore Ardance Materials Research Conference. – Syracuse: Syracuse Univ. Press, 1960.
11. *Галин Л.А.* Об условия в конце трещины. / Л.А. Галин, Я.Б. Фридман, Г.П. Черепанов, Е.М. Морозов, В.З. Партон // *ДАН СССР.* – 1969. – Т. 187. – № 4. – С. 754-757.
12. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. / Г.П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
13. Райс Дж. Независящий от пути интеграл и приближённый анализ концентрации деформаций у вырезов и трещин. / Дж. Райс // *Прикладная механика.* – Сер. Е. – 1968. – Т. 35. – № 4. – С. 340-349.
14. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1984. – 560 с.

15. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. / Дж. Эшелби. – М.: ИЛ, 1963. – 247 с.
16. Партон В.З. Механика упругопластического разрушения. / В.З. Партон, Е.М. Морозов. – М. Наука, 1985. – 504 с.
17. Партон В.З. Динамическая задача для плоскости с разрезом. / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев // ДАН СССР. – 1969. – Т. 135. – С. 541-544.
18. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матъе. / Н.В. Мак-Лахлан. – М.: ИЛ, 1953. – 475 с.
19. Партон В.З. Интегральные уравнения теории упругости. / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М.: Наука, 1977. – 312 с.
20. Бородачёв Н.М. Динамическая задача о трещине в случае деформации продольного сдвига. / Н.М. Бородачёв // Проблемы прочности. – 1973. – № 4. – С. 23-25.
21. Парис П. Анализ напряжённого состояния около трещины. / П. Парис, Дж. Си. – В кн.: Прикладные вопросы вязкости разрушения. – М.: Мир, 1968. – С. 64-142.
22. Seyranian A.P. Multiparameter Stability Theory With Mechanical Applications. / A.P. Seyranian, A.A. Mailybaev. – Singapore: World Scientific Publ. Co., 2003. – 403 p. (Series on Stability, Vibration and Control of Systems. Series A. Vol. 13).
23. Таблицы для вычислений функций Матъе. – М.: ВЦ АН СССР, 1967. – 279 с.